

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2022**

Takmičenje iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Grlica ima tri sina: Labuda, Goluba i Radomira. Labuda je dobila kada je imala 20 godina, Goluba dvije godine nakon Labuda, i Radomira dvije godine nakon Goluba. Ove godine je broj Grlicinih godina jednak zbiru godina njenih sinova. Koliko Grlica ima godina?
2. **(23 poena)** Naći najmanji prirodan broj  $N$  čiji je zbir cifara jednak 2022. Koliki je zbir cifara broja  $N + 1$ ?
3. **(23 poena)** Dat je pravougaonik  $ABCD$ . Na polupravoj  $DC$  biramo tačku  $E$  takvu da je  $DE = DB$ . Neka je  $F$  središte duži  $BE$ . Dokazati da je poluprava  $AF$  simetrala ugla  $\angle BAC$ .
4. **(23 poena)** Neka su  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2022}$  različiti prosti brojevi. Dokazati da broj  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_{2022}}$  nije cio broj.
5. **(23 poena)** Dati su realni brojevi  $x, y$  i  $z$  takvi da važi  $x + y + z = 0$  i  $|x| + |y| + |z| \leq 1$ . Dokazati da važi  $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq \frac{1}{3}$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**