

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

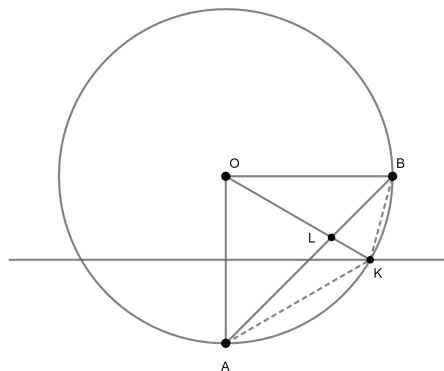
1. Dati su trocifreni brojevi $M = \overline{4a6}$ i $N = \overline{1b7}$ takvi da nijedan od njih nije djeljiv sa 9, ali je njihov proizvod djeljiv sa 9. Odrediti najveću vrijednost zbira $a + b$.

Rješenje:

Kako M i N nisu djeljivi sa 9, ali njihov proizvod jeste, slijedi da su i M i N djeljivi sa 3. Broj je djeljiv sa 3 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3, pa je najveća vrijednost za a tako da je M djeljiv sa 3 (ali ne i sa 9) $a = 5$. Slično, $b = 7$ je najveća vrijednost za b tako da je N djeljiv sa 3 (ali ne i sa 9). Dakle, najveća vrijednost zbira je $a + b = 12$. \square

2. Neka su A i B tačke na kružnici k sa centrom u O tako da je $\angle AOB = 90^\circ$. Simetrala duži AO siječe kraći luk AB kružnice k u tački K i neka je L tačka presjeka duži KO i AB . Dokazati da je trougao $\triangle KBL$ jednakokraki.

Rješenje:



Tačka K pripada simetrali duži AO , što povlači da je $|OK| = |AK|$. Kako tačke K i A pripadaju kružnici sa centrom u O , to važi i $|OA| = |OK|$. Dakle, $\triangle OAK$ je jednakokrani trougao, pa je $\angle AOK = 60^\circ$. Dalje, $\angle KOB = \angle AOB - \angle AOK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Kako je trougao KOB jednakokrani ($|OK| = |OB|$), to je $\angle OKB = \angle OBK = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Iz činjenice da je $\triangle AOB$ jednakokrani ($|OA| = |OB|$) i $\angle AOB = 90^\circ$, analogno se dokazuje da je $\angle OBL = \angle OBA = 45^\circ$. Odavde i iz prethodno dokazanog imamo da je $\angle LBK = \angle OBK - \angle OBL = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Konačno, $\angle KLB = 180^\circ - \angle LBK - \angle LKB = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$. Dakle, $\angle KLB = \angle LKB$, što je trebalo dokazati. \square

3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (m, n) tako da u mreži oblika pravougaonika dimenzija $m \times n$ broj jediničnih kvadrata čija je bar jedna stranica na stranici pravougaonika jednak broju jediničnih kvadrata čije stranice ne leže na stranici pravougaonika.

Rješenje:

Primijetimo da za $m = 1$ ili $n = 1$ nemamo rješenje, jer svi kvadrati imaju jednu stranicu na stranici pravougaonika.

Neka je $m, n \geq 2$. Primijetimo da broj kvadrata čija je bar jedna stranica na stranici pravougaonika jednak

$$m + n + m + n - 4 = 2m + 2n - 4.$$

Iz uslova zadatka slijedi da je $2m + 2n - 4$ jednak polovini ukupnog broja jediničnih kvadrata u pravougaoniku. Dakle,

$$2m + 2n - 4 = \frac{m \cdot n}{2}.$$

Nakon sređivanja imamo da je

$$m \cdot n - 4m - 4n - 8 = 0,$$

odnosno

$$(m - 4)(n - 4) = 8.$$

Kako je $m, n \geq 2$, to je $m - 4, n - 4 \geq -2$. Razlikujemo 4 slučaja:

1. $m - 4 = 1, n - 4 = 8$, tj. $(m, n) = (5, 12)$;
2. $m - 4 = 2, n - 4 = 4$, tj. $(m, n) = (6, 8)$;
3. $m - 4 = 4, n - 4 = 2$, tj. $(m, n) = (8, 6)$;
4. $m - 4 = 8, n - 4 = 1$, tj. $(m, n) = (12, 5)$. \square

4. Na planeti X godina ima 2022 dana. Svaki stanovnik planete X u određenom danu godine govori samo istinu ili samo neistinu (mogući su i slučajevi da stanovnik svaki dan godine govori istinu ili svaki dan godine govori neistinu). Svakog dana u godini je stanovnicima A, B, C planete X postavljeno pitanje: "Koliko dana u godini govorite neistinu?". Zabilježeni su sljedeći odgovori:

Stanovnik A je prvog dana odgovorio: "Jedan dan.", drugog dana je odgovorio "Dva dana.", ..., 2022. dana je odgovorio "2022 dana."

Stanovnik B je prvog dana odgovorio "Barem jedan dan.", drugog dana je odgovorio "Barem dva dana.", ..., 2022. dana je odgovorio "Barem 2022 dana."

Stanovnik C je prvog dana odgovorio "Najviše jedan dan.", drugog dana je odgovorio "Najviše dva dana.", ..., 2022. dana je odgovorio "Najviše 2022 dana."

Za svakog od tri stanovnika odrediti koliko dana u godini i kojim danima godine govori neistinu.

Rješenje:

Stanovnik A: Stanovnik A je dao isključive odgovore, zato može biti da on istinu govori najviše jedan dan u godini. Ako govori neistinu svaki dan godine, onda iskaz iz 2022-og dana godine je tačan, što nije moguće. Zato stanovnik A govori istinu jedan dan u godini, a govori neistinu u preostalih 2021 dana. Na osnovu datih odgovora, zaključujemo da istinu je govorio samo 2021-og dana.

Stanovnik B: Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ broj dana u godini u kojima stanovnik B govori neistinu. Tada dati odgovori prvog, drugog, ..., i n -tog dana godine su tačni a preostali su netačni. Netačne odgovore je dao $2022 - n$ dana, što povlači da je $2022 - n = n$, odnosno $n = 1011$. Stanovnik B ne govori istinu od 1012-og dana do posljednjeg kalendarskog dana godine u planeti X .

Stanovnik C: Neka je, opet, $n \in \mathbb{N}$ broj dana u godini u kojima stanovnik C govori neistinu. Tada dati odgovori iz prvog, drugog, ..., i $(n-1)$ -og dana nijesu tačni, a preostali jesu. Slijedi da je $n-1 = n$, što nije moguće. Ostaje mogućnost da je $n = 0$, tj. da stanovnik C govori uvijek istinu. Primijetimo da u tom slučaju svi dati odgovori na pitanje su tačni. Dakle, stanovnik C je "savršeno iskren". \square